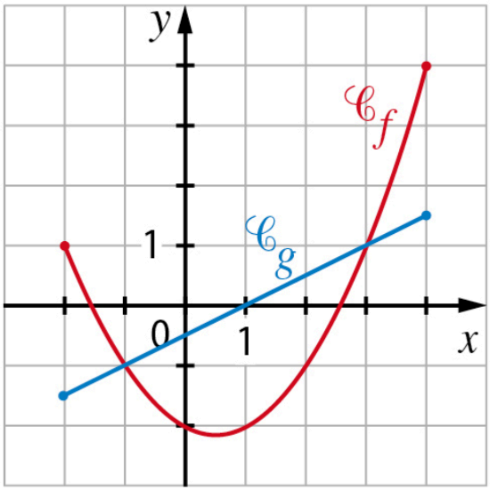
05 : Généralités sur les fonctions

Exercice 1

C_f et C_g sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-2;4]$.



1. a. Déterminer graphiquement l'abscisse de chaque point d'intersection de C_f et C_g.

b. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$

2. a. Donner l'ensemble des abscisses des points de C_f qui sont au-dessous de la courbe C_g.

b. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

3. Déterminer une équation de $g(x)$.

Exercice 2

Soit C la courbe d'équation $y = 2x^2 - 4x - 1$, où x est un réel de l'intervalle $[-2;2]$.

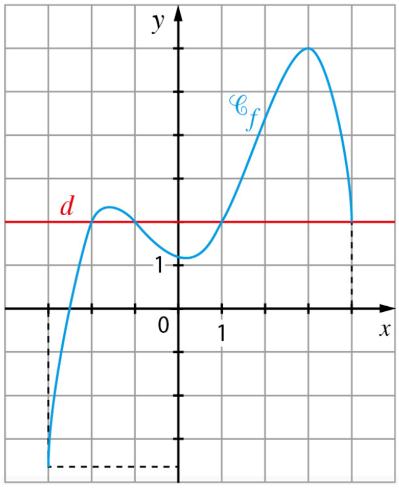
1. a. Les points $A(-1;7)$ et $B\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ appartiennent-ils à C ? Justifier par un calcul.

b. Calculer l'ordonnée du point D de C dont l'abscisse est 2.

2. a. Construire un tableau de valeurs de y pour x variant de -2 à 2 avec un pas de 1.

b. Tracer C dans un repère.

Exercice 3



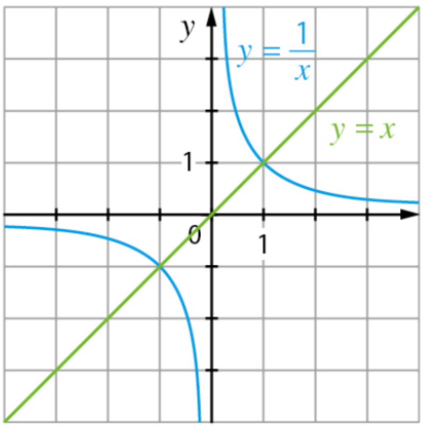
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[-3;4\right]$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessus. La droite d a pour équation $y=2$.

Résoudre par lecture graphique l'équation et les inéquations suivantes.

$f\left(x\right)=2$ $\qquad\qquad$ $f\left(x\right)<2$ $\qquad\qquad$ $f\left(x\right)\geq 2$

Exercice 4

On a tracé ci-dessous la droite d'équation $y=x$ et la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$.



1. Léa dit « D'après ce graphique, je conjecture la propriété suivante : $x\geq\dfrac{1}{x}$ si, et seulement si, $\left[-\infty;-1\right[\cup\left[1;+\infty\right[$ ». Semble-t-elle avoir raison ? Justifier avec une lecture graphique.

2. Pour la démontrer, on étudie le signe de $x-\dfrac{1}{x}$.

a. Démontrer que pour tout réel x non nul : $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{x}$

b. Construire le tableau de signes de $x-\dfrac{1}{x}$.

c. Conclure.

Exercice 5

Un rectangle a une aire égale à $60\ \text{m}^2$.On note x la largeur et y la longueur, en m, de ce rectangle.

1. Exprimer la longueur y en fonction de x.

2. Déterminer la largeur x lorsque $y = 24$.

3. On souhaite que la longueur de ce rectangle soit telle que $y \geq 10$.

a. Montrer que sa largeur doit être telle que $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{6}$.

b. Résoudre cette inéquation et répondre au problème.

Exercice 6

Sam, un jeune ingénieur, fabrique des tablettes numériques et souhaite prendre le statut d'auto entrepreneur pour les commercialiser.
Il estime qu'elle peut en fabriquer au maximum 50 par mois.
Les coûts de fabrication, en euro, sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[0;50]$ par :

$$C(x) = -x^2 + 200x + 1056$$

où x représente le nombre de tablettes produites et vendues.
Chaque tablette est vendue 220 €.

1. Justifier que les recettes sont données, en euro, par la fonction R définie sur $[0;50]$ par $R(x) = 220x$.

2. Obtenir les courbes des fonctions C et R sur une calculatrice et déterminer graphiquement le nombre minimal de tablettes que Sam doit produire et vendre mensuellement pour gagner de l'argent.

3. On note B la fonction bénéfice, c'est-à-dire la fonction définie sur $[0;50]$ par :

$$B(x) = R(x) - C(x).$$

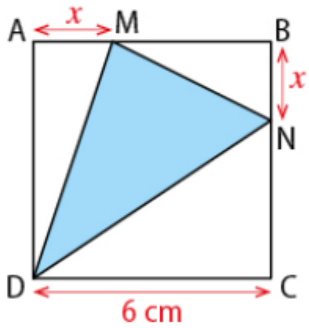
a. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[0;50]$: $B(x) = (x+44)(x-4)$.

b. Dresser le tableau de signes de l'expression $B(x)$.

c. Ce tableau est-il cohérent avec la réponse apportée à la question 2. ? Justifier.

Exercice 7

Soit $ABCD$ un carré de côté 6 cm, M et N deux points mobiles respectivement sur $\left[AB\right]$ et $\left[BC\right]$ et tels que $AM = BN$.



Partie A

Dans cette partie, on fixe $AM = 2$ cm.
1. Calculer l'aire de chacun des triangles AMD, MBN et DCN.

2. En déduire l'aire du triangle MND.

Partie B

On note à présent $AM = BN = x$, où x est un réel.
1. Dans quel intervalle varie x ?

2. Exprimer la longueur CN en fonction de x.

3. a. Montrer que l'aire du triangle CDN est $-3x+18$.

b. Montrer que les aires des triangles AMD et MBN en fonction de x sont :

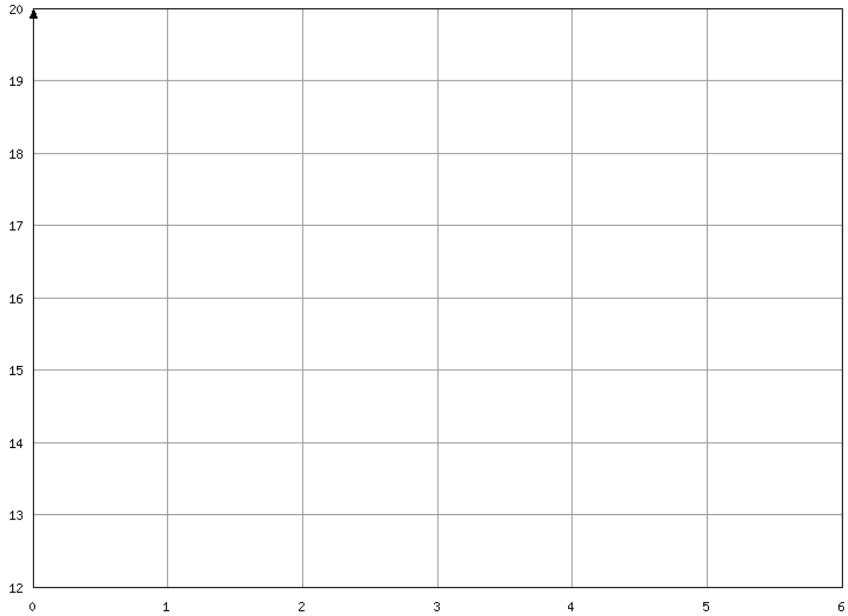
$$A_{AMD} = 3x \qquad \text{et} \qquad A_{MBN} = -0{,}5x^2 + 3x$$

c. En déduire l'aire du triangle MND en fonction de x.

Partie C

Soit f la fonction qui à x associe A_{AMD}, en cm^2.
Cette fonction f est ainsi définie sur $\left[0;6\right]$ par : $f\left(x\right) = 0{,}5x^2 - 3x + 18$.
1. a. Dresser le tableau de valeurs de f avec un pas de 1.

b. Tracer la courbe représentative de f dans un repère.



2. Déterminer graphiquement les valeurs de x pour lesquelles :

a. $A_{AMD} \leq 14 \text{ cm}^2$ **b.** $A_{AMD} = 17 \text{ cm}^2$

3. a. Vérifier que : $f(x) \leq 14$ équivaut à $(0{,}5x - 1)(x - 4) \leq 0$.

b. Résoudre l'inéquation $(0{,}5x - 1)(x - 4) \leq 0$ dans $[0;6]$.

c. Les réponses aux questions 2.a.et 3.b. sont-elles cohérentes ?

Exercice 8

Pour déterminer la position relative d'une courbe par rapport à une autre :

* On calcule la différence entre les expressions des fonctions, que l'on factorise.
* On étudie le signe de la différence en construisant un tableau de signes.
* On fait une conclusion.

Étudier, dans chaque cas, la position relative des courbes représentant f et g :

1. $f(x) = \frac{1}{5}x^2$ et $g(x) = x$. **2.** $f(x) = -2x^3$ et $g(x) = -18x$.

3. $f(x) = x^2$ et $g(x) = -4x - 4$. **4.** $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = -x + 2$.