09 : Nombres entiers – Arithmétique

Exercice 1

Sur le site touristique de Carnac, trois parcours en train sont proposés :
* Circuit court de 12 min en train vert ;
* Circuit standard de 21 min en train bleu ;
* Circuit long de 42 minutes en train rouge.

Le départ se fait simultanément à 14h.
Une famille nombreuse ne réussit pas à trouver de la place ensemble et décide d'attendre la prochaine occasion de prendre un train au choix.
À quelle heure faut-il revenir au plus tôt pour avoir à nouveau le choix des trois trains ?

Exercice 2

Louise dit à son amie Clémence que son âge cette année est strictement inférieur à 99.
L'année prochaine son âge sera divisible par 10 tandis que l'an passé il était divisible par 6.
1. Clémence réfléchit puis lui dit qu'avec ces informations, il y a trois possibilités. Quelles sont-elles ?

2. Louise ajoute que son âge est un multiple de 7. Quel est l'âge de Louise ?

Exercice 3

1. Parmi les nombres suivants dire ceux qui sont premiers, sinon décomposer les en produit de facteurs premiers :

821 ; 861 ; 1001 ; 1027.

2. Donner sous forme de fraction irréductible les fractions suivantes :

$$\frac{540}{506} ; \frac{45600}{7650} ; \frac{12789}{5481}$$

Exercice 4

1. Décomposer 675 et 4725 en produits de facteurs premiers.

2. Simplifier la fraction $\frac{675}{4725}$ au maximum.

3. Calculer $\frac{675}{4725}+\frac{5}{14}$ et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

Exercice 5

On considère l'algorithme suivant :

```
Saisir a
Saisir b
   n ← 1
   c ← a
Tant que b > c :
   c ← na
   n ← n + 1
Fin du tant que
Retourner (n − 1)a
Fin
```

1. a. On choisit $a=17$ et $b=96$, compléter le tableau suivant :

a						
n						

b. Qu'affiche alors l'algorithme ?

2. Quel est l'affichage de l'algorithme si $a=141$ et $b=700$?

3. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Exercice 6

On considère l'algorithme suivant :

```
Saisir un entier naturel a
Pour i variant de 1 à a
   Si Mod(a, i) = 0
   Alors afficher i.
Fin du si
```

1. Qu'affiche l'algorithme si on saisit :
a. $a=5$?   **b.** $a=20$?

2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Exercice 7

Soient *n* et *p* deux entiers naturels.
Le but est de déterminer la parité du produit *np* selon la parité de *n* et de *p*.
Démontrer que :
1. Si *n* et *p* sont pairs alors *np* est pair.

2. Si *n* et *p* sont impairs alors *np* est impair.

3. Si *n* et *p* sont de parités différentes alors *np* est pair.

Exercice 8

Soit la phrase P « Si j'habite à Marseille alors j'habite en France ».
1. La proposition P est-elle vraie ?

2. Donner la proposition réciproque de P. Est-elle vraie ?

3. Donner la proposition contraposée de P. Est-elle vraie ?

Exercice 9

Le but de la question **1.** est de démontrer par disjonction des cas, que $a = n\left(n^2+3\right)$ est pair pour tout entier relatif n.
1. Comment s'écrit un entier pair ? Un entier impair ?

2. Remplacer n par son écriture dans a :
a. Lorsque n est pair.

b. Lorsque n est impair.

c. Conclure sur la parité de a.

3. On considère le nombre $b = \left(n^2+7\right)\left(n-3\right)$, ou n est un entier relatif.
En s'inspirant du raisonnement précédent, montrer que :
a. Si n est pair, alors b est impair.

b. Si n est impair, alors b est un multiple de 8.

Exercice 10

Soient a, b et c trois entiers relatifs.
1. Montrer que si a divise b et a divise c, alors a divise $b+c$ et a divise $b-c$.

2. dans cette question, on veut montrer que la fraction $\dfrac{n}{n+1}$ est irréductible, pour tout entier naturel n.
Pour cela, raisonner par l'absurde en supposant que la fraction n'est pas irréductible, c'est-à-dire qu'il existe un entier d qui divise le numérateur et le dénominateur.

Exercice 11

Le but de l'exercice est de montrer que quels que soient *a*, *b* et *c* trois entiers relatifs avec *a* non nul :
Si *a* divise *b* et si *a* divise *c* alors *a* divise $2b+c$ et *a* divise $b-2c$.
1. Recopier et compléter :
Si *a* divise *b* alors il existe $k \in \ldots$ tels que $b = ka$.
Si *a* divise *c* alors il existe $k \in \ldots$ tels que $c = \ldots a$
Donc $2b+c = \ldots = a(\ldots)$
Or $\ldots \in \mathbb{Z}$ donc *a* divise $2b+c$.

2. En suivant le même raisonnement montrer que *a* divise $b-2c$.

3. Application

On considère un entier naturel *n* tels que *n* divise $2k+6$ et *n* divise $k-5$.
a. Montrer que *n* divise 16.

b. Donner les diviseurs positifs de 16. En déduire les valeurs possibles de *n*.

Exercice 12

1. a. Décomposer 135 et 210 en produit de facteurs premiers.

b. Déterminer un diviseur commun à 135 et 210 appartenant à $[10;40]$.

2. Dans sa salle de bain, Mathias veut recouvrir le mur situé au-dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier en centimètre le plus grand possible.
a. Déterminer la longueur, en cm, du côté d'un carreau sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de Largueur.

b. Combien faudra-t-il de carreaux ?

Exercice 13

Le but de cet exercice est de démontrer que, pour tout entier *n*, le nombre $a = n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 6.
1. Expliquer pourquoi *a* est un nombre pair.

2. Expliquer pourquoi tout nombre *n* de $\mathbb{N}$ s'écrit $n = 3k$ ou $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$, avec $k \in \mathbb{N}$.

3. Dans chacun de ces trois cas, démontrer que le nombre *a* est divisible par 3.

4. Conclure.