02 : Calcul littéral

Exercice 1

Développer et réduire les expressions suivantes :

1. $A = 3x(2x-5) + x(2x-1)$

2. $B = (2x-3)(3x-5) - (2-x)(x+3)$

3. $C = (3x+2)^2$

4. $D = (4x-5)^2$

5. $E = (2x-3)(2x+3)$

6. $F = (3x+2y)^2$

7. $G = \left(5x + \dfrac{3}{2}\right)^2$

8. $H = x^2 - (2-x)(2+x)$

Exercice 2

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = (3x-1)(2x+3) - (5x+2)(2x+3)$

2. $B = (x-5)^2 - (2x-3)^2$

3. $C = x^2 - 25 + (x-2)(x+5)$

4. $D = 25x^2 + 40x + 16$

5. $E = (3x-1)(5x+4) + 25x^2 + 40x + 16$

Exercice 3

1. Écrire sans racine au dénominateur $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

2. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{17}-\sqrt{15}} - \dfrac{1}{\sqrt{17}+\sqrt{15}} = \sqrt{15}$.

3. Soit a un réel strictement positif. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{a+2}-\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

Exercice 4

On considère n un entier naturel. On souhaite comparer les nombres suivants :

$$A = \frac{n+2}{n+3} \text{ et } B = \frac{n+3}{n+4}.$$

1. Justifier que, pour tout entier n, on a : $A - B = \dfrac{-1}{(n+3)(n+4)}$.

2. Étudier le signe de cette différence et conclure.

Exercice 5

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-9+(x+4)(x-3)$.

On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. a. Factoriser x^2-9.

b. En déduire une factorisation de $f(x)$.

3. On dispose ainsi de trois écritures de *f* : la forme initiale, la forme développée et la forme factorisée.
Répondre à chacune des questions suivantes en précisant la forme la plus adaptée.
a. Déterminer l'image de -2 par *f*.

b. Déterminer les éventuels antécédents de -21 par *f*.

c. Déterminer l'ordonnée du point d'abscisse 3 de la courbe C_f.

d. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

e. Justifier que, pour tout réel, on a $f(x)\geq -\dfrac{169}{8}$.

f. Résoudre l'équation $f(x)=7$.

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes :

1. $(3x-5)^2=0$

2. $(x-3)(12+3x)(5x+25)=0$

3. $(x^2-9)(x+10)=0$

4. $(x+4)^2=49$

5. $3(2-x)^2=48$

6. $(2x-3)^2+(x-4)(2x-3)=0$

7. $4x^2-9-(3x+1)(2x+3)=0$

8. $x^2-6x+9=(x+2)(x-3)$

9. $\dfrac{x+3}{x-4}=\dfrac{x+5}{x-2}$

10. $x+\dfrac{1}{x}=2$

Exercice 7 : Comparaison des moyennes arithmétique et harmonique

On considère a et b deux nombres strictement positifs et m et h les nombres définis par :

$$m=\frac{a+b}{2} \text{ et } h=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

m est la moyenne arithmétique et h la moyenne harmonique des nombres a et b.

1. Justifier que $h=\frac{2ab}{a+b}$.

2. Démontrer que : $m-h=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$

3. Comparer alors les moyennes arithmétique et harmonique m et h.

Exercice 8

Partie A : Mise en problème

On considère le problème suivant.
Un père a 25 ans de plus que son fils. Dans 5 ans, il aura le double de l'âge de son fils. Quels sont les âges respectifs du fils et du père ?

Étape 1 : choix de l'inconnue et mise en équation.
On appelle x l'âge actuel du fils.
1. Exprimer en fonction de x l'âge actuel du père, l'âge du fils dans 5 ans et l'âge du père dans 5 ans. On pourra remplir le tableau suivant.

	Âge du fils	Âge du père
Actuellement	x	
Dans 5 ans		

2. En utilisant la donnée « dans 5 ans, le père aura le double de l'âge de son fils », justifier que x est solution de l'équation $x+30=2(x+5)$.

Étape 2 : résolution de l'équation.
Résoudre l'équation précédente.

Étape 3 : retour au problème.
Interpréter la résolution précédente et conclure en répondant au problème posé.

Partie B : À toi de jouer

Une fille a 24 ans de moins que sa mère.
Quand elle aura l'âge de sa mère, la somme de leur âge sera de 88 ans.
Quel est l'âge de la fille et de la mère ?

Exercice 9

Soit a, b et c des réels quelconques.

1. a. Développer $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$.

b. En déduire que pour tout réels a, b et c on a : $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$.

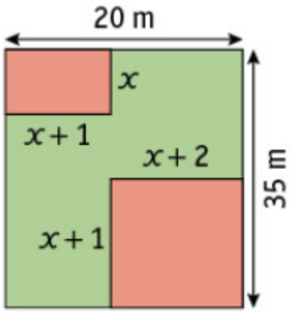
2. a. Développer $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

b. En déduire que pour tout réels positifs a, b et c on a : $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$.

c. Démontrer que pour tout réels positifs a, b et c :
Si $abc=1$, alors $a^3+b^3+c^3 \geq 3$.

Exercice 10

Sur un terrain rectangulaire, on doit découper deux parcelles (en rouge) comme indiqué ci-dessous :



x est exprimé en m.

1. Déterminer en fonction de x l'aire $A(x)$ formée par ces deux parcelles.

2. L'aire de ces deux parcelles doit être de 288 m^2. Montrer que l'équation $A(x)=288$ équivaut à $(x+1)(2x+2)=288$.

3. Résoudre l'équation précédente et en déduire la valeur de x recherchée.

4. Quelle est alors l'aire de la surface verte ?