1 Division et Divisibilité

Définition 1. *Faire la **division euclidienne** d'un nombre **a** par un nombre **b non nul**, c'est trouver **les** deux **uniques** nombres **q et r** tels que :*

$$a = b \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < b$$

Vocabulaire : ***a** est le **Dividende**, **b** est le **Diviseur**, **q** est le **Quotient** et **r** est le **Reste***

Remarque 1. ***Attention*** *: Diviser par 0 est impossible et interdit.*

Exemple(s) 1.

$45 \div 7$ $121 \div 11$ $5 \div 10$

Définition 2. *Un nombre a **est divisible** par un autre b lorsque le reste, dans la division euclidienne, est nul (égal à 0).*

Vocabulaire 1. *On dit aussi que :*

- *a est **un multiple** de b*
- *b est **un diviseur** de a*

Exemple(s) 2.

Remarque 2.

- *1 est un diviseur de tous les nombres.*
- *Tous les nombres sont divisibles par eux même.*

2 Critères de Divisibilité

Pour savoir si un nombre est divisible par 2, 3, 4, 5, 9 ou 10, il y a des astuces qui permettent de gagner du temps et de ne pas poser le calcul ou utiliser la calculatrice.
Ce sont les critères de divisibilité.

Propriété 1.

- *Un nombre **est divisible par 2** s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8. (On dit qu'il est **pair**).*
- *Un nombre **est divisible par 3** si la somme de ses chiffres est divisible par 3.*
- *Un nombre **est divisible** par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.*
- *Un nombre **est divisible par 5** s'il se termine par 0 ou 5.*
- *Un nombre **est divisible par 9** si la somme de ses chiffres est divisible par 9.*
- *Un nombre **est divisible par 10** s'il se termine par 0.*

Et réciproquement. (exemple : Si un nombre est divisible par 2 alors il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8. Et cetera).

Exemple(s) 3.
Prenons le nombre 126.

- *126 se termine par 6 donc il est divisible par 2.*
- $1+2+3=6=3\times 2$ *donc 126 est divisible par 3.*
- *126 se termine par 26 qui n'est pas divisible par 4 (* $26=4\times 6+2$*) donc 126 n'est pas divisible par 4.*
- *126 ne se termine pas par 0 ou 5 donc 126 n'est pas un multiple de 5.*
- $1+2+3=6$ *mais 6 n'est pas divisible par 9 donc 126 n'est pas divisible par 9.*

- *126 ne se termine pas par 0 donc 10 n'est pas un diviseur de 126.*

2.1 Liste des diviseurs d'un nombre

Pour faire la liste des diviseurs d'un nombre, la méthode ici consistera à :

- Faire 2 lignes car les diviseurs se trouvent par couple.
- Tester tous les nombres jusqu'à tomber sur un diviseur de la première ligne qu'on a déjà trouvé grâce à la deuxième ligne.
- Il peut arriver que le nombre ait très peu de diviseurs, auquel cas on s'arrête quand on a testé tous les diviseurs jusqu'à la moitié du nombre (il n'y en aura pas d'autres).
- On pensera à utiliser les critères de divisibilité quand c'est possible.

Exemple(s) 4. *Pour 126 :*

• *1*	*2*	*3*	~~*4*~~	~~*5*~~	*6*	*7*	~~*8*~~	*9*	~~*10*~~	~~*11*~~	~~*12*~~	~~*13*~~	*14*
• *126*	*63*	*42*			*21*	*18*		*14*					

On s'arrête à 14 car nous l'avons déjà trouvé en bas.

La liste des diviseurs de 126 est : 1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63 et 126.

3 Nombres Premiers

Définition 3. *__Un nombre premier__ est un nombre qui a exactement 2 diviseurs.*

Remarque 3.

- ***1 n'est pas un nombre premier.***
- *Les 2 diviseurs d'un nombre premier sont 1 et lui même.*
- *2 est le seul nombre premier pair.*

Exemple(s) 5.
3 est premier, il a pour diviseurs : 1 et 3 | 4 n'est pas premier car il a 3 diviseurs : 1, 2 et 4.

Nous allons faire la liste de tous les nombres premiers < 30.
Pour cela, nous allons utiliser la méthode du **Crible d'Ératosthène** :

$\cancel{1}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

La liste des nombres premiers ≤ 30 est :

4 Décomposition en facteurs premiers

On parle de nombres premiers car on peut construire tous les nombres ≥ 2 grâce à eux.

Propriété 2.
Tout nombre ≥ 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.
De plus cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Exemple(s) 6.

$42 = 2 \times 3 \times 7$ | $28 = 2 \times 2 \times 7$ | $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

5 PGCD

Définition 4. *Le __plus grand diviseur commun__, noté __PGCD__, de deux nombres est le plus grand nombre qui les divise tous les deux.*

Il servira souvent dans les problèmes où l'on demande de faire "un maximum de lots identiques".

Remarque 4. *Pour déterminer le PGCD de deux nombres, __on utilise leur décomposition en facteurs premiers__.*
(Une autre méthode consiste à faire ce que l'on appelle __l'algorithme d'Euclide__.)

Exemple(s) 7. *On a 42 cookies et 28 muffins et on veut faire un maximum de paquets identiques.*

D'après leurs décompositions ci-dessus, on peut faire 14 paquets de 3 cookies et 2 muffins.
En effet : 2×7 est le PGCD de 42 et 28. __On note__ $PGCD(42, 28) = 14$.