1 Puissances de 10

Pour exprimer de grands nombres comme le million, le milliard ou les millions de milliards, l'outil "puissance" est très pratique. De même pour les tout petits nombres.

En quelques caractères, on prend la route de l'infiniment grand ou de l'infiniment petit.

1.1 Exposant positif

Définition 1. *Une **puissance de 10** correspond à une répétition de multiplication par 10 :*

Soit n un nombre entier positif,

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}}$$

*On lit 10 "**puissance**" n. On dit que n est **l'exposant**.*

Enfin, on définit : $10^0 = 1$

Exemple(s) 1.

$$\begin{aligned} 10^2 &= 10 \times 10 \\ &= 100 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 10^3 &= 10 \times 10 \times 10 \\ &= 1000 \end{aligned}$$

1.2 Exposant négatif

Définition 2.

*L'exposant peut-être **négatif**. Soit n un entier positif.*

On définit : $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$ *et* $10^{-n} = \frac{1}{\underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}}} = \frac{1}{10^n}$

*C'est à dire que 10^{-n} est **l'inverse** de 10^n.*

Exemple(s) 2.

$$\begin{aligned} 10^{-2} &= \frac{1}{10 \times 10} \\ &= \frac{1}{100} \\ &= 0.01 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 10^{-3} &= \frac{1}{10 \times 10 \times 10} \\ &= \frac{1}{1000} \\ &= 0.001 \end{aligned}$$

1.3 Opérations sur les puissances de 10

Propriété 1. *Voici les règles de calculs sur les puissances :*

Soient n, m deux entiers :

$10^n \times 10^m = 10^{n+m}$; $\frac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$; $(10^n)^m = 10^{n \times m}$

Exemple(s) 3.

$$\begin{aligned} 10^2 \times 10^3 &= 10^{2+3} \\ &= 10^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^{-4} \times 10^7 &= 10^{-4+7} \\ &= 10^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{10^5}{10^{-4}} &= 10^{5-(-4)} \\ &= 10^{5+4} \\ &= 10^9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(10^7\right)^2 &= 10^{7\times 2} \\ &= 10^{14} \end{aligned}$$

2 Généralisation

Définition 3. *Soient a un nombre et n un nombre entier positif, on définit :*

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \quad ; \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}} = \frac{1}{a^n}$$

Enfin : $a^0 = 1$ pour $a \neq 0$
(0^0 n'est pas défini.)

Exemple(s) 4.

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125 \quad ; \quad 4^{-1} = \frac{1}{4} \quad ; \quad 20^{-4} = \frac{1}{20^4} = \frac{1}{160\ 000} \quad ; \quad 32^0 = 1$$

Attention : $(-5)^2 \neq -5^2$ *car* $25 \neq -25$

Remarque 1.
On peut déterminer le signe d'une puissance d'un nombre négatif en fonction de la parité de l'exposant :

$(-3)^8 = +3^8$ *(exposant pair : résultat positif)* ; $(-3)^7 = -3^7$ *(exposant impair : résultat négatif)*

Propriété 2. *Les règles de calculs sur les puissances :*
Soient a et b deux nombres et n, m deux entiers :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad ; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad ; \quad (a^n)^m = a^{n\times m} \quad \text{et} \quad a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

Exemple(s) 5.

$$\begin{aligned} 2^2 \times 2^3 &= 2^{2+3} \\ &= 2^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-5)^{-4} \times (-5)^7 &= (-5)^{-4+7} \\ &= (-5)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{12^5}{12^7} &= 12^{5-7} \\ &= 12^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(4^3\right)^5 &= 4^{3\times 5} \\ &= 4^{15} \end{aligned}$$