01 : Ensembles et nombres réels

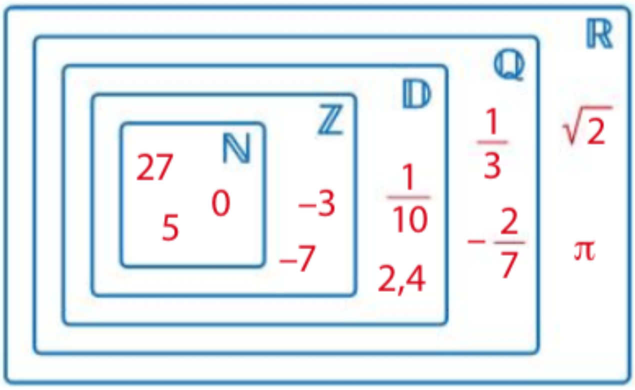
I. L'ensemble des réels

1. Droite des réels

Notations

Les nombres sont classés dans des ensembles en fonction de leurs propriétés.

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{D}$: l'ensemble des nombres décimaux.
- $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.



Remarque

Tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont des éléments de $\mathbb{Z}$. On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$.
On écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2. Les intervalles

Définition

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

- L'intervalle $[a;b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$.
  Il est représenté sur la droite des réels par un segment dont les extrémités sont les points d'abscisses a et b.
- L'intervalle $]a;+\infty[$ est l'ensemble des réels x tel que $a < x$.
  Il est représenté sur la droite des réels par une demi-droite dont l'origine est le point d'abscisse a.

Remarques

- On définit de même les intervalles $]a;b]$, $]a;b[$, $[a;b[$, $[a;+\infty[$, $]-\infty;b]$ et $]-\infty;b[$.
- Les intervalles sont des parties de $\mathbb{R}$.
- $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres mais des notions.

3. Valeur absolue

Introduction

Soient *A* et *B* deux points de la droite des réels d'abscisses respectives *a* et *b*.
La distance entre les réels *a* et *b* est la distance *AB*, elle se calcule à l'aide de la fonction valeur absolue.
On a $AB = |b-a|$.
Si *M* est un point quelconque d'abscisse *x* et si *O* est l'origine (c'est-à-dire le point d'abscisse 0), alors $OM = |x-0| = |x|$.

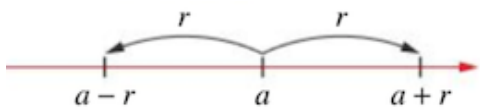
Définition

Soit un nombre réel *x* et *M* le point d'abscisse *x* de la droite des réels.
La valeur absolue de *x*, notée $|x|$, est égale à la distance *OM*.

- $x \geq 0$, alors $|x| = x$.
- $x \leq 0$, alors $|x| = -x$.

Remarques

Si *r* est un réel strictement positif, alors pour tout réel *x* :
$|x-a| \leq r \Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r$
La distance entre le point *M* d'abscisse *x* et le point *A* d'abscisse *a* est inférieure ou égale à *r*.



Exercice 1
1. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

a. $5 \in]-\infty;4]$ **b.** $-2,5 \in [-2;5]$ **c.** $10^{-15} \in]0;1[$
d. $10^{-15} \in [0;+\infty[$ **e.** $3,72 \in]3,719;3,721[$ **f.** $3,4 \in]3,3;3,4]$

Représenter les intervalles suivants sur une droite graduée.

a. $]-3;4]$ **b.** $]-\infty;-2[$ **c.** $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

Exercice 2

1. Hachurer sur une droite graduée, l'ensemble des réels x vérifiant $|x-3| \leq 4$

2. Traduire à l'aide d'une valeur absolue la condition $y \in [7{,}4;7{,}6]$

II. Ensemble des nombres décimaux et des nombres rationnels

1. Les décimaux

Définition

d est un nombre décimal s'il existe un entier relatif a et un entier naturel n tel que $d = \dfrac{a}{10^n}$

Remarque

Tous les nombres écrits sous forme de fraction ne sont pas décimaux !

Application 1

Démontrer que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Réponse

On raisonne par l'absurde.

On suppose que $\dfrac{1}{3}$ est un nombre décimal.

Dans ce cas, il existe un entier relatif a et un entier naturel n tel que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$, alors $a = \dfrac{10^n}{3}$.

Or une puissance de 10 n'est jamais divisible par 3, donc la fraction n'est pas entière.
Ainsi, le nombre a ne serait pas entier, ce qui contredit l'hypothèse !

On en déduit que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Propriété

Un nombre décimal admet une partie décimale qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres.

2. Les rationnels

Définition

Un nombre q est rationnel s'il existe deux entiers relatifs a et b avec $b \neq 0$, tels que $q = \dfrac{a}{b}$.

Remarque

- Tous les nombres réels ne sont pas des rationnels.
- Tout nombre rationnel admet une forme irréductible unique : $\dfrac{a}{b}$ avec a et b premiers entre eux.

Application 2

Démontrer que $\sqrt{2}$ n’est pas rationnel.

Réponse

On raisonne par l'absurde en supposant qu'on peut écrire $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ sous forme irréductible.

Alors $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, donc $a^2 = 2b^2$.

Donc a^2 est pair. Ce qui implique que a est pair. Donc a s’écrit $a = 2k$, autrement dit $a^2 = 4k^2$.

Donc $4k^2 = 2b^2$ donc $b^2 = 2k^2$. Donc b est pair.

Donc la fraction $\dfrac{a}{b}$ est simplifiable par 2. Elle n’est donc pas irréductible. Contradiction.

Donc $\sqrt{2}$ n’est pas rationnel.

Exercice 2

1. Soit $A = 5{,}555\ldots$. Montrer que $A = \dfrac{50}{9}$.

2. Déterminer la forme rationnelle des nombres suivants :
$B = 1{,}333\ldots$, $C = 2{,}1212\ldots$ et $D = 12{,}3123123\ldots$

III. Règles de calculs

1. Puissances entières relatives

Rappels

Soit a un nombre réel et n un entier.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ fois}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$$

Règles de calcul

a et b sont des réels non nuls, n et p deux entiers relatifs.

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \qquad \left(a^n\right)^p = a^{n\times p}$$

$$\left(a \times b\right)^n = a^n \times b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

2. Racines carrées

Règles de calcul

Soit a et b deux réels positifs.

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Démonstration : Démontrons que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = a \times b$

$\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$

Donc $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Remarque

En général $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Démontrons-le.

$\left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a+b$ et $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{a} \times \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$.

Comme $\sqrt{ab} \geq 0$, alors $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a+b}\right)^2$ autrement dit $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Application 3

Écrire le plus simplement possible les nombres suivants :

$A=\sqrt{27}\times\sqrt{3}$ $\quad B=\sqrt{32}\times\sqrt{2}$ $\quad C=\sqrt{5}\times\sqrt{16}\times\sqrt{5}$

$D=\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ $\quad E=\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}}$ $\quad F=\left(4\sqrt{5}\right)^2$

$G=\dfrac{\sqrt{22}\times\sqrt{10}}{\sqrt{80}}$

Application 4

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible :

$A=\sqrt{72}$ $\quad B=\sqrt{45}$ $\quad C=3\sqrt{125}$

$D=\sqrt{12}+7\sqrt{3}-\sqrt{27}$ $\quad E=\sqrt{125}-2\sqrt{20}+6\sqrt{80}$

Application 5

Écrire sous la forme $a+b\sqrt{c}$, avec a, b et c entiers.

$A=\left(5-\sqrt{3}\right)^2$ $\quad B=\left(\sqrt{2}-3\right)^2$

$C=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ $\quad D=\left(3+\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)$

Application 6

Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$