Chapitre 7 - Lois discretes

1 Rappels de première

1.A Variable aléatoire

Définition

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire s'appelle l'univers.
Il se note souvent Ω.

Exemple :
On lance un dé à six faces et on note le score obtenu.
L'univers associé à cette expérience aléatoire est : ....

Définition

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.
Définir une variable aléatoire réelle sur Ω, revient à associer un nombre réel à chaque issue de l'expérience aléatoire.

Exemple :
On lance un dé à six faces. Si on obtient un nombre pair, on gagne 2 points, et on gagne 1 point sinon. Le nombre de points gagnés est une variable aléatoire.

Remarque :
Une variable aléatoire est donc une fonction définie sur l'ensemble Ω et à valeur dans l'ensemble des réels.

Notations

- On note en général avec des lettres majuscules (X, Y, ou Z) les variables aléatoires.
- Si X est une variable aléatoire et k un nombre :
  — l'événement "X est égal à k" se note : ....
  — l'événement "X est strictement inférieur à k" se note : ....
  — l'événement "X est inférieur ou égal à k" se note : ....
  — l'événement "X est strictement supérieur à k" se note : ....
  — l'événement "X est supérieur ou égal à k" se note : ....

Définition

Si une variable aléatoire X prend un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs, on dit que la variable aléatoire est discrète. (Dans le cas contraire, on parle de variable aléatoire continue.)

Exemples :

- On lance 10 dés à six faces. On note X le nombre de dés ayant donné 1.
  X peut valoir 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ou 10. X est donc une variable aléatoire ....

- Un supermarché garantit une attente aux caisse inférieure à 10 minutes. On suppose que l'on peut mesurer le temps avec une précision infinie, et on note X le temps d'attente en minutes.
  X peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $[0; 10]$. X est donc une variable aléatoire ....

1.B Loi de probabilité

Dans la suite, on se restreint à des variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs.

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète. Notons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs pouvant être prises par X.
On définit la loi de probabilité de X en associant à chaque valeur x_i une probabilité notée p_i.
Les valeurs de p_i vérifient :

- pour tout i, on a : $0 \leq p_i \leq 1$,
- la somme des p_i vaut 1.

Notations

On représente en général une loi de probabilité prenant un nombre fini de valeurs à l'aide d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Remarque :
p_i est la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$.

Notations

Si X est une variable aléatoire et k un nombre :

- la probabilité que X soit égal à k se note : ....
- la probabilité que X soit strictement inférieur à k se note : ....
- la probabilité que X soit inférieur ou égal à k se note : ....
- la probabilité que X soit strictement supérieur à k se note : ....
- la probabilité que X soit supérieur ou égal à k se note : ....

Exemple :
On lance un dé parfaitement équilibré. On gagne 10 euros si on obtient 6, 2 euros si on obtient 4 ou 5, et on perd 1 euro sinon. On note X la somme obtenue.

On résume ce jeu dans un tableau :

Valeur prise par X	....	....	....
Probabilité	....	....	....

- $P(X = 2) =$ ....
- $P(X = 10) =$ ....
- $P(X \geq 2) =$ ....
- $P(X < 4) =$ ....

1.C Espérance, variance, écart-type

1.C.1 Espérance

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète pouvant prendre les valeurs x_1, x_2, ..., x_n. On appelle espérance de X la moyenne des valeurs x_i pondérées par leur probabilité d'apparition :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \cdots + x_n \times P(X = x_n).$$

Exemple :
Reprenons l'exemple précédent. Alors :

$E(X) =$ ....

Notation avec le symbole Σ :

1.C.2 Variance et écart-type

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète pouvant prendre les valeurs x_1, x_2, ..., x_n.

- On appelle variance de X le nombre $V(X)$ tel que :

$$\begin{aligned} V(X) =& (x_1 - E(X))^2 \times P(X = x_1) + (x_2 - E(X))^2 \times P(X = x_2) + \ldots \\ & + (x_n - E(X))^2 \times P(X = x_n). \end{aligned}$$

- On appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque :
$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

Exemple :
Reprenons l'exemple précédent. Alors :

$V(X) =$..
....

Notation avec le symbole Σ :

2 Loi uniforme

Définition

Soit n un entier strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ si pour tout i entre 1 et n on a $P(X = i) = \dfrac{1}{n}$.
La loi de X est alors donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	1	2	...	n
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Exemple :
On lance un dé parfaitement équilibré et on note X le score obtenu.
X suit une loi ....

Propriété

Soit X une variable aléatoire sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Alors :

- l'espérance de X vaut $E(X) = \dfrac{1+n}{2}$
- l'écart-type de X vaut $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}}$

Exemple :
Si X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 10\}$ alors :

- l'espérance de X vaut $E(X) =$ ....
- l'écart-type de X vaut $\sigma(X) =$ ....

3 Loi de Bernoulli

Définition

- On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire ayant exactement deux issues. Ces issues sont appelées "succès" et "échec".
  En général, on note p la probabilité de succès et $q = 1 - p$ la probabilité d'échec.
- Soit p un réel dans l'intervalle $[0; 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si sa loi est résumée par le tableau suivant :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

Exemple :
52% des habitants d'une ville sont des hommes. On choisit un habitant au hasard. On considère alors que X vaut 1 si l'individu est un homme et X vaut 0 sinon.
X suit une loi ....

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors :

- l'espérance de X vaut : $E(X) = p$
- l'écart-type de X vaut : $\sigma(X) = \sqrt{p \times (1 - p)}$

Exemple :
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,7$. Alors :

- l'espérance de X vaut $E(X) =$ ....
- l'écart-type de X vaut $\sigma(X) =$ ....

4 Loi binomiale

4.A Répétition d'expériences aléatoires indépendantes

Définition

On dit que des expériences aléatoires sont indépendantes si le résultat de l'une des expériences n'influence pas le résultat des autres.
Autrement dit, des expériences aléatoires sont indépendantes si elles sont toutes réalisées dans les mêmes conditions.

Exemples :

- On lance un dé à six faces, puis on lance une pièce. Ces deux expériences aléatoires sont indépendantes.
- On lance douze fois de suite le même dé. On a alors effectué une répétition de douze expériences identiques et indépendantes.

Remarque :
Si l'on effectue une succession d'expériences aléatoires, on appelle issue la liste des résultats obtenus.

Exemple :
On lance un dé à six faces trois fois de suite. La liste $(1\,;\,6\,;\,2)$ est l'une des issues de l'expérience.

Propriété

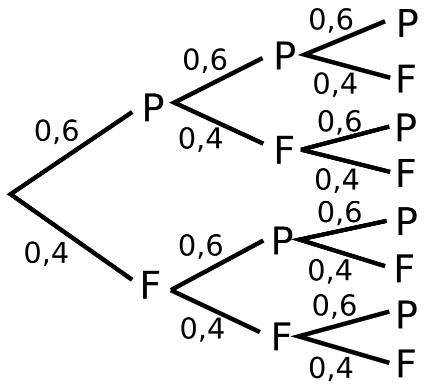
Lorsqu'on effectue une succession d'expériences indépendantes, la probabilité de la liste de résultats est égale au produit des probabilités de chaque résultat.

Exemple :
On lance un dé trois fois de suite. La probabilité de la liste $(1\,;1\,;2)$ vaut : ....

À savoir

Un arbre de probabilité est un graphique permettant de visualiser les issues d'une succession d'expériences aléatoires.

Exemple :
On lance une pièce truquée trois fois de suite. on suppose que la probabilité que la pièce tombe sur "face" est de $0,4$. On note P l'événement "la pièce est tombée sur pile" et F l'événement "la pièce est tombée sur face".
On représente la situation dans l'arbre suivant :



4.B Coefficients binomiaux

Définition

Soit n un entier positif. On effectue une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
Pour un entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on appelle alors coefficient binomial de paramètres n et k le nombre d'issues contenant exactement k succès.
Ce coefficient binomial se note $\binom{n}{k}$, et se lit "k parmi n".

À la calculatrice :

TI :

- Taper la valeur de n.
- Touche $\boxed{\text{math}}$, choisir prb, puis 3 :Combinaison.
- Taper la valeur de k.

Casio :

- Dans le menu run-mat, taper la valeur de n.
- Touche $\boxed{\text{optn}}$, choisir prob, puis nCr.
- Taper la valeur de k.

Numworks :

- Appuyer sur la touche boîte à outils et choisir "Dénombrement" puis "binomial"
- Remplir les valeurs de n et k.

Exemple :
$\binom{6}{2}$ vaut : .... $\binom{10}{3}$ vaut : .... $\binom{10}{4}$ vaut : ....

4.C Loi binomiale

Définition

On considère la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de probabilité de succès notée p. On note X le nombre de succès obtenus.
On dit alors que X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Exemples :
Dans une population, 60% des individus sont membres d'une association. On choisit successivement 10 individus au hasard (avec remise), et on note X le nombre de membres d'association parmi ces 10 individus. Alors X suit une loi ....

Propriété

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, on a pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k) \quad = \quad \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exemple :
À peu près 40% d'européens parlent anglais. Lors d'un sondage, on choisit au hasard 20 européens. On note X le nombre de sondés parlant anglais. Alors :

- X suit une loi ....
- $P(X = 9) =$..

Propriété

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors $E[X] = n \times p$ et $V(X) = n \times p \times (1 - p)$.

À la calculatrice :

TI :

- Pour calculer $P(X = k)$: $\boxed{\text{2nde}} + \boxed{\text{var}}$ puis choisir 0 :binomFdp.
  Compléter : binomFdp(n,p,k).
- Pour calculer $P(X \leq k)$: $\boxed{\text{2nde}} + \boxed{\text{var}}$ puis choisir A :binomFRép.
  Compléter : binomFRép(n,p,k).

Casio :
Dans le menu stat, choisir dist puis binm.

- Pour calculer $P(X = k)$: choisir bpd
- Pour calculer $P(X \leq k)$: choisir bcd

Dans les deux cas, compléter :
Data : variable (touche $\boxed{\text{F2}}$) ;
x :k ; Numtrial : n ; p :p.

Numworks :
Dans le menu Probabilités, choisir Binomiale puis saisir les valeurs de n et p. Pour choisir le type de calcul, aller sur le petit graphique jaune et appuyer sur OK.

- Pour calculer $P(X = k)$: choisir le dernier cas, puis saisir la valeur de k
- Pour calculer $P(X \leq k)$: choisir le premier cas, puis saisir la valeur de k

Exemple :
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres 40 et 0,25. Alors :

- $P(X = 15) \approx$ ....
- $P(X \leq 15) \approx$ ....

5 Loi géométrique