10 : Fonctions trigonométriques

I. Cercle trigonométrique et radian

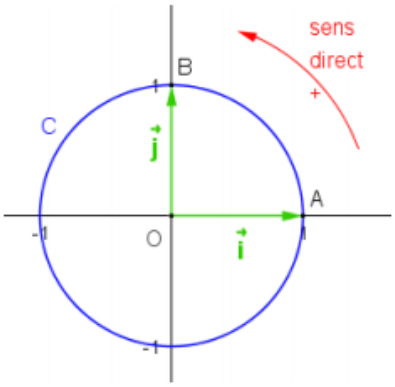
1. Le cercle trigonométrique

Définition

Sur un cercle, on appelle sens direct, sens positif ou sens trigonométrique le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ et orienté dans le sens direct, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.

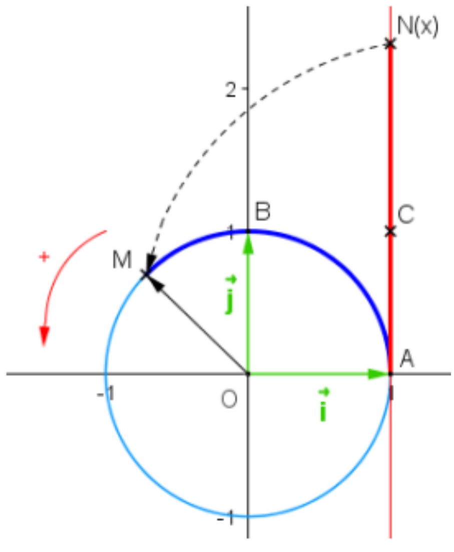


2. Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $\left(A;\vec{j}\right)$ soit un repère de la droite.

Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$, est ainsi égale à la longueur AN.

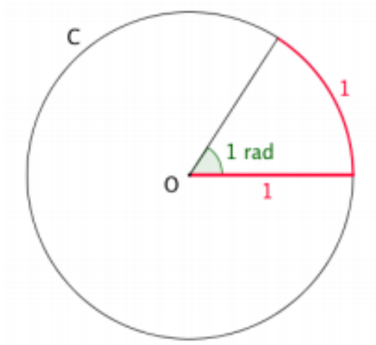


3. Le radian

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.
En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$.
Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π.
On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

Définition

On appelle radian, noté rad, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



4. Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°.
Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Application 1

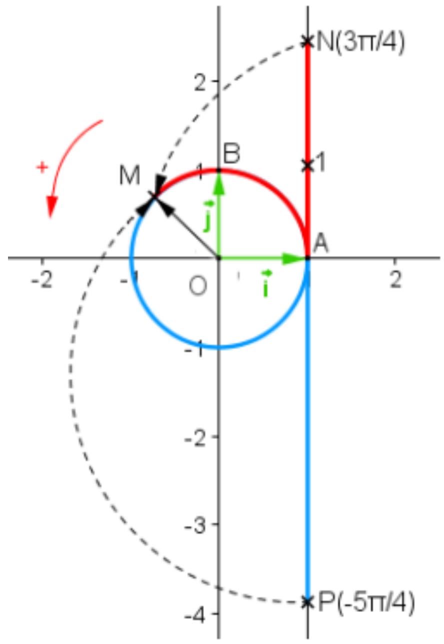
1. Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 44°.

2. Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

II. Mesure d'un angle orienté

1. Plusieurs enroulements de la droite

A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle dans un sens et dans l'autre.



Exemples

Ci-contre, les points N et P d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{-5\pi}{4}$ correspondent tous les deux au point M.

En effet, $\frac{3\pi}{4}-2\pi=-\frac{5\pi}{4}$.

On pourrait poursuivre le processus dans l'autre sens en effectuant deux tours successifs. Ainsi, les points d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{19\pi}{4}$ correspondent au point M.

En effet : $\frac{3\pi}{4}+4\pi=\frac{19\pi}{4}$.

Application 2

1. Placer sur le cercle trigonométrique, le point M tel que l'angle $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$ mesure $\frac{9\pi}{4}$ rad.

2. Placer sur le cercle trigonométrique, le point N tel que l'angle $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$ mesure $\frac{8\pi}{3}$ rad.

2. Mesure principale d'un angle orienté

On a vu qu'un angle possède plusieurs mesures.
Si θ est une mesure de l'angle $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$ alors tout angle de la forme $\theta+k\times2\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$, est une mesure de l'angle $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$.

On dit que l'angle $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$ est égal à θ modulo 2π.

Définition

La mesure principale d'un angle orienté est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Application 3

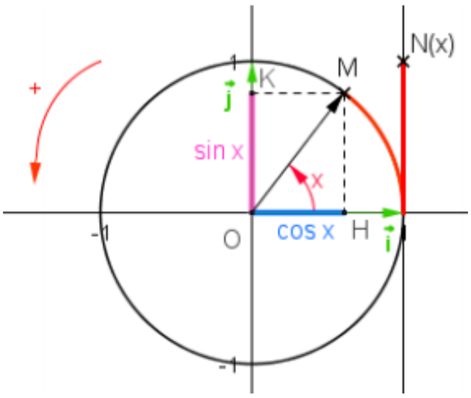
1. Donner la mesure principale de l'angle $\dfrac{205\pi}{3}$.

2. Donner la mesure principale de l'angle $-\dfrac{107\pi}{4}$.

III. Cosinus et sinus d'un angle

1. Définitions

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O.
Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x. À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique. On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.



Définitions

- Le cosinus du nombre réel x est l'abscisse de M et on note $\cos x$.
- Le sinus du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note $\sin x$.

2. Propriétés

1. $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

3. $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

4. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ où k entier relatif

5. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ où k entier relatif

3. Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

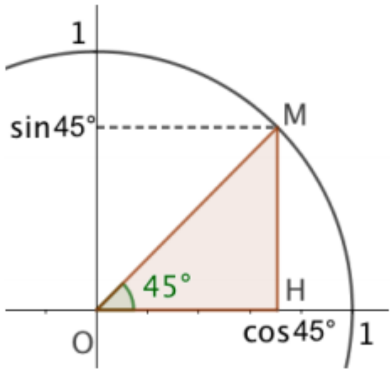
Démonstrations au programme

Démontrons que : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

La mesure $\frac{\pi}{4}$ radian est à égale à la mesure 45°.

Le triangle OHM est rectangle est isocèle en H, en effet l'angle $\widehat{OMH}$ est égal à : $180-90-45=45°$.

Donc $HO=HM$ et donc : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.



Or, $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

Soit : $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Démontrons que : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

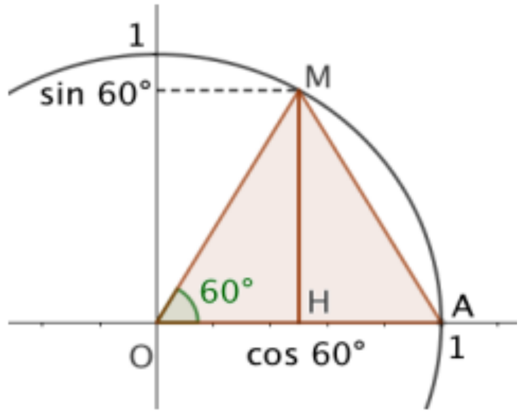
La mesure $\frac{\pi}{3}$ radian est à égale à la mesure 60°.

Le triangle *OMA* est isocèle en *O*, en effet $OA = OM$

Donc les angles $\widehat{OMA}$ et $\widehat{OAM}$ sont égaux à

$\frac{180-60}{2}=60°$. Donc le triangle *OMA* est équilatéral.

Ainsi la hauteur *MH* est aussi une médian. Elle coupe $[OA]$ en son milieu *H*.



On a donc donc $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

De plus , $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$

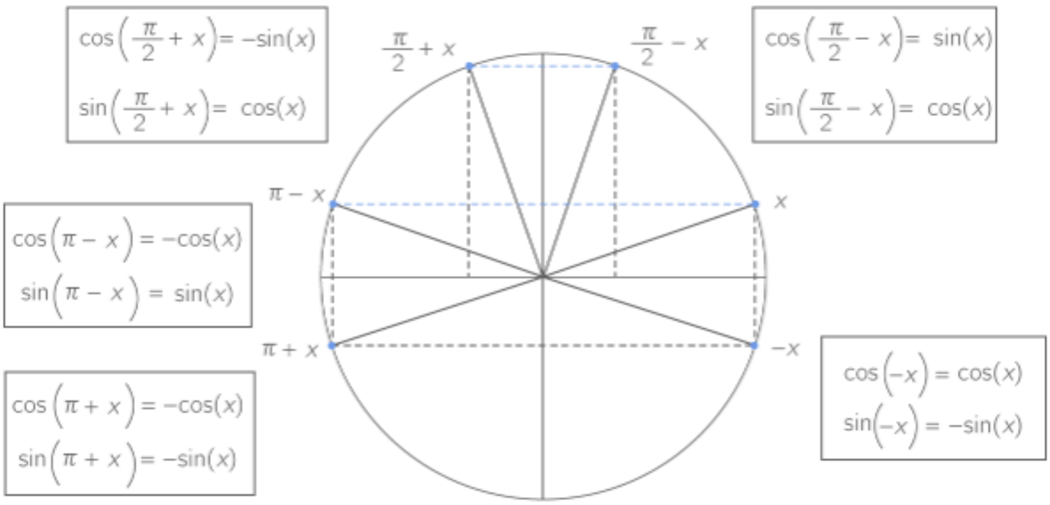
Soit : $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\frac{1}{4}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, donc $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$ et ainsi $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Cosinus et sinus d'angles associés

$\cos(\pi-x)=-\cos x$	$\sin(\pi-x)=\sin x$
$\cos(x+\pi)=-\cos x$	$\sin(x+\pi)=-\sin x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

Démonstrations : Par symétries, on démontre les résultats



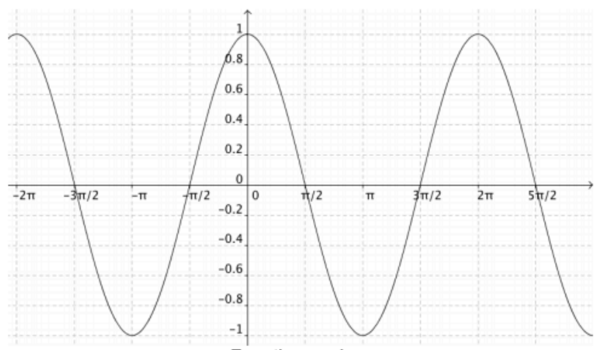
Application 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

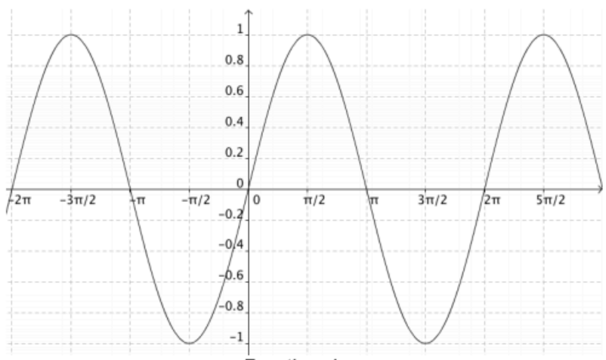
1. $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **2.** $\sin x=-\dfrac{1}{2}$

II. Fonctions cosinus et sinus

1. Représentations graphiques



Fonction cosinus



Fonction sinus

2. Périodicité

On a vu que :
$\cos(x+2k\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ où k entier relatif.
Donc les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .

Conséquence

Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π et de la compléter par translation.

3. Parité

On a vu que :
$\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$.
Donc la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

Conséquence

- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

Application 5

Démontrer que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x-\sin(2x)$ est impaire.