04 : Suites numériques : Généralités

I. Définir une suite numérique

1. Généralités

Une suite numérique est une succession de nombres réels, chacun étant un terme de la suite. On numérote les termes, le plus souvent à partir de 0 ou de 1, ce qui revient à faire correspondre à des entiers naturels des nombres réels.

Exemple

Indice	1	2	3	4
Terme	3	9	27	81

Définition

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

2. Notation

L'image de l'entier *n* par la suite *u* se note u_n au lieu de $u(n)$. u_n se lit "*u* indice *n*".

On dit que u_n est le terme de **rang** *n*. La suite *u* se note aussi $u(n)$.

Remarque

Pour une suite *u*, le terme suivant u_n est u_{n+1} et le terme précédent u_n est u_{n-1}.

Exercice 1

Soit la suite *u* définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n(n-1)$.

1. Calculer u_0, u_5, u_{10} et u_{30}.

2. Exprimer u_{n-1} et u_{n+1} en fonction de *n*.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n$.

Il y a deux façons de générer une suite : par une formule explicite ou par récurrence.

3. Suite définie par une formule explicite

Définition

Définir une suite par une formule explicite, c'est, pour tout entier naturel *n*, donner une relation de la forme $u_n = f(n)$ où *f* est une fonction définie sur $[0;+\infty[$.

Un terme u_n s'exprime directement en fonction de son rang *n*.

4. Suite définie par une relation de récurrence

Définition

Définir une suite par une relation de récurrence, c'est donner la valeur du terme Initial, u_0 par exemple, et un procédé qui permet de calculer un terme à partir de celui qui le précède.
Pour tout entier *n*, on a :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right) \end{cases}$$

Remarque

Pour calculer un terme, on a besoin de calculer pas à pas tous ceux qui le précèdent.

Application

On donne $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

1. Déterminer les 5 premiers termes de la suite. Vérifier les résultats à la TI (touche ANS)
2. À partir de quel rang on a $u_n > 125$?

Exercice 2

On considère la suite $\left(u_n\right)$ telle que : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{1}{2}n$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Écrire une relation liant u_n et u_{n-1}.

II. Sens de variation d'une suite

1. Définition

- La suite $\left(u_n\right)$ est croissante à partir du rang *p* si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite $\left(u_n\right)$ est décroissante à partir du rang *p* si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- La suite $\left(u_n\right)$ est constante ou stationnaire à partir du rang *p* si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarques

On dit qu'une suite est monotone si elle est soit croissante soit décroissante.

2. Détermination du sens de variation

3 techniques sont à retenir :

- On cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, on compare le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.
- Si $u_n = f(n)$, on étudie les variations de *f*.

Exercice 3

Étudier la monotonie des suites dont le terme général est :

$s_n = \dfrac{1}{n+1}$ $u_n = n - \sqrt{n}$; $w_n = \dfrac{2^n}{n^2}$. $\begin{cases} t_0 = 0,5 \\ t_{n+1} = t_n(1 - t_n) \end{cases}$

III. Comportement d'une suite à l'infini

1. Suite convergente

On considère la suite $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$.

On construit le tableau de valeurs à l'aide de la TI :

n	1	2	3	4	5	10	15	50	500
u_n	0,75	1	1,167	1,286	1,375	1,615	1,722	1,906	1,99

Plus *n* devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher de 2.

On dit que la suite (u_n) converge vers 2 et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 2$.

2. Suite divergente

Exemple 1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier *n* par $u_n = n^2 - 1$.

$u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_{10} = 99$, $u_{100} = 9999 \dots$

Plus *n* devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grand.

On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$

Exemple 2

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout entier n par $u_0=1$ et $u_{n+1}=2u_n$

$u_0=1$, $u_1=2$, $u_2=4$, $u_3=8$, $u_4=16\ldots$

Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grand.

On dit que la suite $\left(u_n\right)$ diverge vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n\right)=+\infty$

Exemple 3

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout entier n par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\left(-1\right)^n u_n$.

$u_0=2$, $u_1=-2$, $u_2=2$, $u_3=-2$, $u_4=2\ldots$

Les valeurs de u_n sont 2 ou -2, pour toute valeur de n.

$\left(u_n\right)$ ne tend pas vers un seul nombre lorsque n devient de plus en plus grand.

$\left(u_n\right)$ diverge.

Exercice 4

Soit u la suite définie, pour tout entier naturel n, par : $u_0=-1$ et $u_{n+1}=2u_n+\dfrac{1}{2}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite u.

2. Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_{n+1}-u_n$.

a. Calculer les premiers termes de la suite v et établir une relation de récurrence simple reliant deux termes consécutifs de la suite v.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n<0$.

c. Quel est le sens de variation de la suite u ?

Exercice 5

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017.
Le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés devient inférieur à 2000.
Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- Entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve ;
- Entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve perd 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

Selon ce modèle, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$.

On a donc $u_0=3000$.

1. Justifier que $u_1=2926$.

2. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n : $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$

3. On désigne par (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 1520$ et (t_n) telle que $t_n = 1480 \times 0,95^n$.

a. Vérifier que $v_0 = t_0$ puis que $v_{n+1} = 0,95v_n$ et $t_{n+1} = 0,95t_n$. Que peut-on en déduire ?

b. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.□

4. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés dans la réserve sera inférieur à 2000.

```
Defsuite( )
n = 0
u = 3000
While …
n = …
u = …
Return n
```

5. Quelle est cette année ?