09 : Géométrie repérée

I. Rappels sur les droites

1. Critère de colinéarité

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

2. Vecteur directeur d'une droite

Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Application 1

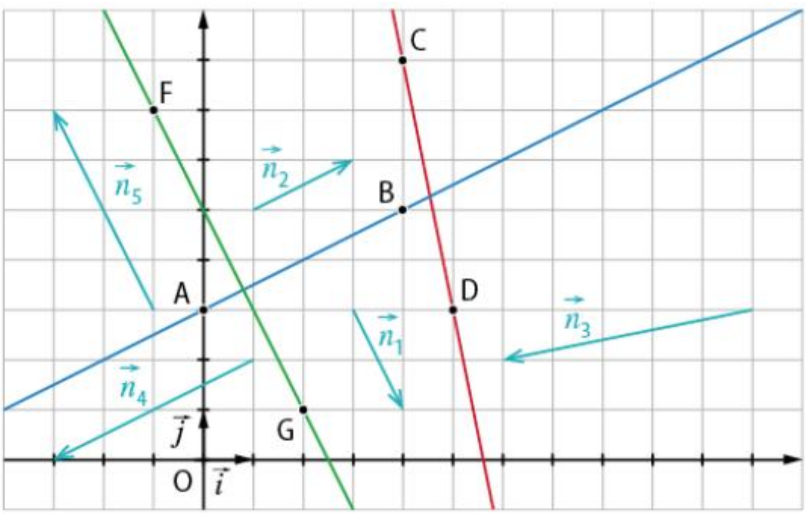
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_1 passant par le point $A(4;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 passant par le point $B(-1;5)$ et le point $C(2;4)$.

II. Droites dans un repère

Activité préparatoire

1. a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par lecture graphique.
Que représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour la droite (AB) ?



b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n_1}$ par lecture graphique.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_1}$. Que peut-on en déduire ?

On dit que le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur normal à la droite (AB).
d. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{FG}$ est un vecteur normal à la droite (AB).

e. Citer un autre vecteur normal à la droite (AB).

2. Parmi les vecteurs représentés, lequel est un vecteur normal à la droite (CD) ?

3. Parmi les vecteurs représentés, lesquels sont des vecteurs directeurs de la droite (FG) ?
Des vecteurs normaux à la droite (FG) ?

1. Vecteur normal à une droite

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Définition

Un vecteur normal à une droite *d* est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de *d*.

Propriété

Soit *d* une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$, *A* un point de *d* et *M* un point du plan.
M appartient à *d* si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

2. Équation cartésienne d'une droite

Propriété

Soit *d* une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$.
Une équation cartésienne de *d* s'écrit $ax+by+c=0$.

Réciproquement, l'équation $ax+by+c=0$ est celle d'une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$.

Démonstration

Soit $A(x_A;y_A)$ un point de la droite *d*.

Le point $M(x;y)$ est un point de *d* si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

Comme, $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A)$et $\vec{n}(a;b)$, alors $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ équivaut à :

$a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$ et donc à $ax+by-ax_A-by_A=0$, autrement dit $ax+by+c=0$ avec $c=-ax_A-by_A$

Réciproquement soit *d* l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$.

d est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$.

$\vec{n}.\vec{u}=a\times(-b)+b\times a=0$. Donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

$\vec{n}$ est un vecteur normal à *d*.

Exercice 1

Soit *d* la droite passant par le point $A(-2;3)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(4;-5)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite *d*.

Exercice 2

Sur la droite *d* d'équation $x+3y-4=0$ et le point $A(2;4)$.

Déterminer les coordonnées du point *H*, projeté orthogonal du point *A* sur la droite *d.*

III. Cercles dans un repère

Propriété

Une équation du cercle de centre $A(x_A;y_A)$ et de rayon *r* est :

$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$

Démonstration

Tout point $M(x;y)$ appartient au cercle de centre $A(x_A;y_A)$ et de rayon *r* si et seulement $AM^2=r^2$.

Or $AM=\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}$, autrement dit $AM^2=(x-x_A)^2+(y-y_A)^2$. D'où le résultat.

Exercice 3

On considère le cercle *C* de centre $A(3;-2)$ et passant par le point $B(-1;5)$.
Déterminer une équation du cercle *C*.

Exercice 4

On considère l'ensemble *E* d'équation : $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.
1. Démontrer que l'ensemble *E* est un cercle dont on déterminera les caractéristiques (centre, rayon).

2. Le Point $B(4;-2)$ est-il un point du cercle ?

3. Déterminer les coordonnées des points de *C* d'abscisse 1.