06 : Fonctions dérivées

I. Fonction dérivée

1. Fonction dérivée sur un intervalle

Définition

On dit que f est dérivable sur l'intervalle I, si elle est dérivable en tout réel a de I.
La fonction qui, à chaque réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f. On la note f'.

2. Dérivées de fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f(x)=k$ (Constante)	$f'(x)=0$
$f(x)=mx+p$	$f'(x)=m$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^n$ $(n\geq 1)$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration

Démontrer la formule pour la fonction constante, la fonction affine, la fonction carrée, la fonction inverse et la fonction racine carrée.

II. Opérations sur les fonctions dérivées

1. Dérivée d'une somme

Théorème

Soit u et v sont deux fonctions dérivables sur I.
La fonction $u+v$ est dérivable sur I, et on a : $(u+v)'=u'+v'$

Exemple

$f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$, alors $f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$.

$f(x)=\sqrt{x}-x^3$, alors $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-3x^3$.

2. Dérivée d'un produit

Théorème

Soit u et v sont deux fonctions dérivables sur I, et k un réel.
Les fonctions uv et ku sont dérivables sur I, et on a :

$$(ku)' = ku' \quad \text{et} \quad (uv)' = u'v + v'u$$

Exemple

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + 1$, alors $f'(x) = x^2 - 3x - 5$

$f(x) = (x^2 + x)(x^3 - x)$, alors :

$f'(x) = (2x+1)(x^3 - x) + (3x^2 - 1)(x^2 + x)$ $\qquad$ $f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x$

$f(x) = x\sqrt{x}$, alors :

$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x$ $\qquad$ $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

Démonstration au programme pour le produit

$$\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a) - v(a)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a) + u(a+h)v(a) - u(a+h)v(a)}{h}$$

$$= \frac{[u(a+h) - u(a)]v(a) + u(a+h)[v(a+h) - v(a)]}{h}$$

$$= \frac{u(a+h) - u(a)}{h}.v(a) + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}.u(a+h)$$

Comme u et v sont dérivables en a, on a alors :

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$

On a également $\lim\limits_{h \to 0} u(a+h) = u(a)$

Donc on a : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + v'(a)u(a)$

Donc la fonction uv est dérivable est on a : $(uv)' = u'v + v'u$

3. Dérivée de l'inverse et d'un quotient

Théorème

Soit u et v sont deux fonctions dérivables sur I, telle que v ne s'annule pas sur I.
Les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I, et on a :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemples

$f(x) = \frac{1}{2x+1}$, alors $f'(x) = \frac{-2}{(2x+1)^2}$

$f(x) = \frac{-3}{x^2+1} = -3 \times \frac{1}{x^2+1}$, alors : $f'(x) = -3\frac{-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2}$

$f(x) = \frac{2x+1}{3x-5}$ $\qquad f'(x) = \frac{2(3x-5)-3(2x+1)}{(3x-5)^2} = \frac{-13}{(3x-5)^2}$

4. Composée de dérivée

Théorème

Soit f est une fonction dérivable sur I, et a et b 2 réels.
La fonction $f(ax+b)$ est dérivable sur I, et on a :

$$\left[f(ax+b)\right]' = af'(ax+b)$$

Exemples

$f(x) = \sqrt{3x-1}$, alors $f'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

$f(x) = \sqrt{2x+3}$, alors : $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

Exercice 1

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{1}{3x^2+1}$ $\qquad g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\qquad h(x) = \frac{5x}{4x-2}$ $\qquad i(x) = \sqrt{4x+3}$

II. Variations de fonctions

1. Signe et sens de variation

Théorème

Soit une fonction *f* définie et dérivable sur un intervalle *I*.

- Si $f'(x) \geq 0$, alors *f* est croissante sur *I*.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors *f* est décroissante sur *I*.

Application 1

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 1$.
1. Calculer la fonction dérivée de *f*.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de *x*.
3. Dresser le tableau de variations de *f*.

Application 2

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$.
Dresser le tableau de variations de *f*.

2. Extremum d'une fonction

Théorème

Soit une fonction *f* définie et dérivable sur un intervalle *I*.
Si la dérivée f' de *f* s'annule et change de signe en un réel *c* de *I* alors *f* admet un extremum en $x = c$.
(Maximum : $+ \ 0 \ -$ et minimum : $- \ 0 \ +$)

Exemple : Application 1

3. Position relative de deux courbes

Pour étudier la position relative entre 2 courbes C_f et C_g, il suffit d'étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

Application 3

Soit *f* et *g* 2 fonctions définies sur $[-1;+\infty[$ par $f(x) = 3x^3 - x^2 + x + 5$ et $g(x) = x^3 + 2x^2 + x$.
Étudier la position relative entre C_f et C_g.