08 : Fonction exponentielle

I. Fonction exponentielle

1. Existence et unicité

Théorème

Il existe une unique fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0)=1$.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle et notée exp.
Ainsi, pour tout réel *x* : $\exp'(x)=\exp(x)$ et $\exp(0)=1$.

Propriété

Pour tout réel *x*, on a : $\exp(x)\times\exp(-x)=1$.
Par conséquent : pour tout réel *x*, $\exp(x)\neq 0$.

Démonstration

On pose pour tout réel *x*, $h(x)=\exp(x)\times\exp(-x)$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables et, pour tout réel *x* :
$h'(x)=\exp'(x)\times\exp(-x)+\exp(x)\big(\exp(-x)\big)'$
$h'(x)=\exp(x)\times\exp(-x)-\exp(x)\times\exp(-x)$.
$h'(x)=0$
La fonction *h* est donc constante sur $\mathbb{R}$ et, comme $h(0)=1$, on obtient pour tout réel *x* :
$h(x)=1$.
Finalement, pour tout réel *x*, $\exp(x)\times\exp(-x)=1$ et donc $f(x)\neq 0$.

2. Propriétés algébriques

Pour tous réels *x* et *y* et pour tout entier relatif *n* :

1. $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$

2. $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$

3. $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

4. $\exp(nx)=\left[\exp(x)\right]^n$

<u>Démonstration</u>

1. Soit *y* réel fixé. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\exp(x+y)\times\exp(-x)$.

$f'(x)=\exp(x+y)\times\exp(-x)+\exp(x+y)\times\left[-\exp(-x)\right]$

$f'(x)=\exp(x+y)\times\exp(-x)-\exp(x+y)\times\exp(-x)$.

$f'(x)=0$

Donc *f* est constante. On a alors :

$f(x)=f(0)=\exp(0+y)\times\exp(-0)=\exp(y)$.

cad $\exp(x+y)\times\exp(-x)=\exp(y)$

d'où $\exp(x+y)=\dfrac{1}{\exp(-x)}\times\exp(y)=\exp(x)\times\exp(y)$.

2. Propriété précédente

3. $\exp(x-y)=\exp(x)\times\exp(-y)=\exp(x)\times\dfrac{1}{\exp(y)}=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

4. Admise

3. <u>Notation</u>

On note le nombre $\exp(1)=e$.

$e\approx 2,718$ à 10^{-3} près.

Pour tout réel *x*, on a : $\exp(x)=\exp(1\times x)=\left[\exp(1)\right]^x=e^x$.

La propriété précédente donne :

1. $e^{x+y}=e^x\times e^y$ **2.** $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$

3. $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ **4.** $e^{nx}=\left(e^x\right)^n$.

<u>Exercice 1</u>

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

2. Simplifier $A(x)=\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2$.

<u>Exercice 2</u>

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

Montrer que, pour tout réel *x* : $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}$

II. Étude de la fonction exponentielle

1. Signe et sens de variation

Théorème

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

On sait que, pour tout réel *x*, on a $e^x \neq 0$.

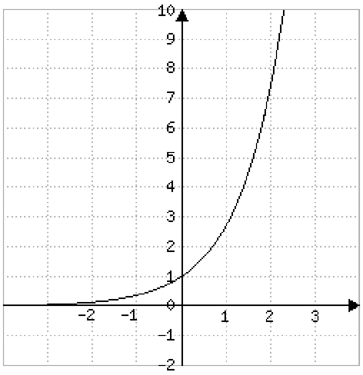
Donc $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0$.

De plus $\left(e^x\right)' = e^x > 0$, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le tableau de variation de la fonction exponentielle est :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$(\exp x)'$	+
$\exp x$	0 $\nearrow$ $+\infty$

2. Représentation graphique



Propriétés

Pour tout réel *x* et *y* :

1. $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$ $\qquad$ **2.** $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$.

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{4x-1} \geq 1$.

Exercice 4

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-x$.

1. Calculer la dérivée de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$, et une comparaison entre e^x et x.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^x$.

1. Calculer $f'(x)$
2. Construire le tableau de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

III. Croissance et décroissance exponentielle

1. Définition

Propriété

Soit un réel $k>0$, on considère les fonctions f_k et g_k sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(t)=e^{kt} \qquad \text{et} \qquad g_k(t)=e^{-kt}.$$

Les fonctions f_k correspondent à une croissance exponentielle.
Les fonctions g_k correspondent à une décroissance exponentielle ou atténuation.

Variations

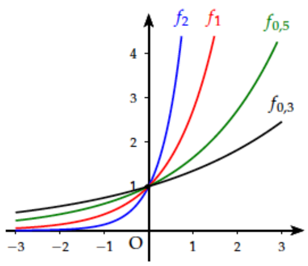
Les fonctions f_k et g_k sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :

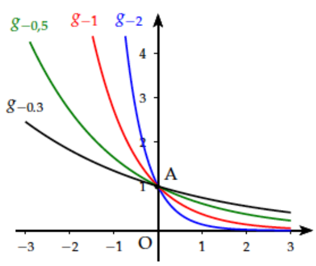
$$f_k'(t)=ke^{kt} \qquad \text{et} \qquad g_k'(t)=-ke^{-kt}$$

Les fonctions f_k et g_k sont respectivement croissantes et décroissantes.
On obtient les tableaux de variation :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_k'(t)$		$+$	
$f_k(t)$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_k'(t)$		$-$	
$g_k(t)$	$+\infty$ ↘	1 ↘	0





Exercice 6

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps, en heures, peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0;10]$ et telle que $f'(t)=0{,}14f(t)$.

1. Montrer que la fonction f définie sur $[0;10]$ par $f(t)=Ae^{0{,}14t}$ convient.

2. On suppose que $f(0)=50000$. Déterminer A.

3. Déterminer les variations de f sur $[0;10]$.

4. a. À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis après 5h30.
b. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.